رهیافت اصولی در تعیین شاخصهای نابرابری در آمد : معرفی خانواده شاخصهای آنتروپی تعمیم یافته

کلید واژه

خانواده شاخصهای آنتروپی تعمیم یافته ، اندازه های اطلاع مرتبه اول و دوم تیـل ، سـازگـاری یکپـارچـه ، تجزیه پذیری جمعی

چکیده

برای اندازه گیری میزان نابرابری درآمد شاخصهای متفاوت و زیادی ارائه شده است که این شاخصها انـدازه های مختلفی از نابرابری بدست داده و رتبه بندی های متفاوتی از توزیعهای درآمدی بدست می دهنـد . در این مقاله رهیافت اصولی در تعیین شاخصهای نابرابری ارائه شـده و سـپس خـانواده شـاخصهای آنـتروپـی تعمیم یافته که در کلیه این اصول صدق می کنند معرفی می شوند . شکل تجزیه شده ایـن خـانواده ارائـه شده و توسط دو مثال موضوع بحث روشن ترمی شود .

مقدمه

برای اندازه گیری میزان نابرابری در توزیع درآمد یک جامعه شاخصهای متفاوتی ارائه شده است . برخـی از این شاخصها به جهت راحتی در محاسبه ، برخی به جهت ملاحظات آماری و برخی نیز بنا به مفهومی که از عدالت ، مساوات و رفاه اجتماعی به عمل آمده است ارائه شده اند .

شاخصهائی مانند ضریب جینی [۱]، واریانس[۲] ، ضریب پراکندگی [۳]، شاخص هرفیندال[۴] ، انـدازه هـای اطـلاع تیل[۵] ، خانواده شاخصهای آتکینسون[۶] و خانواده شاخصهای آنتروپی تعمیم یافته [۷]، برخـی از ایـن شـاخصها هستند .

---

[۱]-Gini Coefficient

[۲]-Variance

[۳]-Coefficient of Variation

[۴]-Herfindahl

[۵]-Theil’s Information Measures

[۶]-Atkinson

[۷]-Generalized Entropy

در یک تقسیم بندی شاخصهای نابرابری را به دو طبقه شـاخصهای عینـی[۱] و شـاخصهای قیاسـی[۲] تقسـیم میکنند . مطابق این تقسیم بندی شاخصهای عینی ابزارها و معیارهای آماری هستند که بـر مبنـای انـدازه گیری میزان پراکندگی درآمد افراد جامعه به تجزیه و تحلیل الگوی توزیع درآمد و تعیین میزان نابرابری آن پرداخته و توجه مستقیم به مطلوبیتهای جامعه ، تابع رفاه فردی و تابع رفاه اجتماعی ندارنـد . شـاخصهائی مانند واریانس ، ضریب پراکندگی و ضریب جینی از این دسته اند .

منتقدین شاخصهای عینی معتقدند که بدون استفاده از فرضهائی در ارتباط با تـابع رفـاه اجتمـاعی امکـان رتبه بندی [۳]کامل توزیعهای درآمد ، اندازه گیری نابرابری آنها و تعیین میزان تفاوت و اختلاف بیـن الگوهـا وجود ندارد و براین اساس شاخصهای نابرابری را بر پایه مقایسه حداکثر رفاه اجتماعی ، مطـابق بـا تعریفـی که از تابع رفاه به عمل می آید ، با میزان از دست دادن بخشـی از ایـن رفـاه تنظیـم مـی کننـد . اینگونـه شاخصها را شاخصهای قیاسی گویند . شاخصهائی مانند خانواده شاخصهای آتکینسون ، شـاخص دالتـون[۴] و نیز شاخص سن[۵] از این دسته اند .

حد و مرز مشخص و صریحی بین این دو طبقه وجود ندارد بطوریکه برخی معتقدند هر شاخص عینی یـک شاخص قیاسی نیز هست چون این شاخصها نیز در بر گیرنده اشکال خاصی از توابع رفاه اجتماعی است .

شاخصهای مختلف ، چه شاخصهای عینی و چـه شـاخصهای قیاسـی ، انـدازه هـای متفـاوتی بـرای مـیزان نابرابری به دست می دهند و بخصوص اینکه رتبه بندی های مختلفی از الگوهای توزیع درآمد بدسـت داده که بعضا این رتبه بندی ها با یکدیگر مغایرت دارد .

سئوال عمده ای که در استفاده از این شاخصها مطرح می شود آنستکه کدامیک از آنها مناسبتر است ؟ آیـا میتوان در بین انبوه این شاخصها شاخصی را تعیین کرد که بر سایر آنها ارجحیت داشـته باشـد ؟ کوشـش برای یافتن پاسخی برای این سئوال بی نتیجه است . چون طرح هر شاخصی بر مبنای دیـدگـاه و برداشـت خاصی از نابرابری ، رفاه ، عدالت و مساوات صورت گرفته است کـه ایـن دیـدگاهـها ، همـانند نظریـه هـای مختلف اقتصادی ، متفاوت از یکدیگر است . لذا شاخصی که در ارجح بودن آن اجماع عمومی وجود داشـته باشد و یا معیاری که توسط آن بتوان کیفیت این شاخصها را تعیین کرده و آنها را با یکدیگـر مقایسـه کـرد وجود ندارد .

در مقابل گروهی از اقتصاددانان توجه خود را به طرح مجموعه خواص و اصولی کرده اند که در ساختن یک شاخص نابرابری باید مورد استفاده قرار گیرد . وجود چنین مجموعه خواصی مـی توانـد پاسـخ مناسـبی در ایجاد و انتخاب یک شاخص نابرابری باشد .

این مقاله رهیافت اصولی که توسط شاروک[۶] [۱] و[۲] ، بورگیونن[۷] [۳] و معصومی[۴] طراحی و تکمیل شده و مطابق آن خانواده شاخصهای آنتروپی تعمیم یافته ، GE ، به عنوان مناسبترین شاخص معرفی می شـوند را ارائه میدهد .

۱-Objective

۲-Syllogistical

۳-Ranking

۴-Dalton

۵-Sen

۶-Shorrocks

۷-Bourguignon

رهیافت اصولی

فرض کنید جامعه شامل N فرد باشد که هر فرد می تواند یک نفر[1] یا یک خانوار[2] باشد . فرض کنید $X = (x_1, x_2, ..., x_N)$ بردار درآمد جامعه با میانگین μ باشد . هر شاخص نابرابری مانند $I(X)$ باید در اصول زیر صدق کند .

اصل اول : اصل تقارن[3]

$I(X)$ نسبت به هر جایگشت از عناصر X پایا[4] است . به عبارت دیگر ترتیب قرار گرفتن مؤلفه های X در مقدار $I(X)$ بی تاثیر است .

برخی مؤلفین اصل تقارن را بصورت عدم وابستگی شاخص نابرابری به سایر ویژگی های افراد جامعه (با عنوان اصل Anonymity) مطرح کرده اند . مطابق با این ویژگی شاخص نابرابری تنها باید به توزیع فراوانی درآمدها بستگی داشته و به سایر ویژگی های افراد مانند ثروت ، تحصیلات ، جنسیت و مانند اینها ربطی نداشته باشد . یعنی اگر تعدادی از افراد جامعه با ویژگی های متفاوت جایگاه درآمدی خود را تغییر دهند اندازه شاخص نابرابری نباید تغییر کند . این دو ویژگی با یکدیگر معادلند .

اصل دوم : اصل نرمالیزه [5]

اگر برای هر i ، $x_i = a$ که a مقداری ثابت است ، آنگاه $I(X) = 0$.

به عبارت دیگر در صورتی که کلیه درآمدها با هم برابر باشد آنگاه مقدار شاخص باید صفر باشد .

اصل سوم : اصل انتقالات[6] *یا اصل پیگو-دالتون*[7]

فرض کنید برای i و j ئی خاص ، $x_i > x_j$ و نیز فرض کنید X' یک توزیع مجدد[8] از X باشد بطوریکه $x'_i = x_i - d > x_j + d = x'_j$ و برای $k \neq i, j$ ، $x_k = x'_k$ در اینصورت $I(X') < I(X)$.

اصل چهارم : اصل پیوستگی [9]

$I(X)$ نسبت به همه آرگومانهایش پیوسته است . این اصل که توسط تقریبا همه شاخصهای نابرابری برآورده میشود کمک زیادی در محاسبات ریاضی و مقایسه جمعیتهای مختلف با یکدیگر می کند .

---

[1]-Individual

[2]-Household

[3]-Symmetry

[4]-Invariant

[5]-Normalization

[6]-Transfers

[7]-Pigo-Dalton

[8]-Redistribution

[9]-Continuity

اصل پنجم : اصل همگونی[1] یا اصل پایائی نسبت به تغییر متناسب [2]

فرض کنید برای ثابت غیر صفر c ، $X' = cX$ در اینصورت $I(X) = I(X')$.

به عبارت دیگر شاخص $I(X)$ باید نسبت به تبدیل مقیاس[3] پایا باشد . دراینصورت اگر کلیه درآمدها بطـور متناسبی تغییر کنند (درصد ثابتی به آنها اضافه شده یا کــم شـود) شـاخص نـابرابری تغیـیر نمـی کنـد . بنابراین مطابق این اصل شاخص نابرابری باید مستقل از واحد اندازه گیری و نیز مستقل از میانگین درآمــد جامعه باشد . این اصل دامنه شاخصهای نابرابری را به شـاخصهای نسـبی [4]محـدود مـی کنـد . شـاخصهای نسبی شاخصهائی هستند که حوزه مقادیر آنها فاصله صفر تا یک است .

اصول ۱ تا ۵ برای رتبــه بنـدی توزیعـهای درآمـد [5]توسـط برخـی روابـط چـیرگـی احتمـالی [6]و چـیرگـی لورنز[7]مناسب است اما کلاس همه شاخصهائی که در این اصول صدق می کننــد بسـیار بـزرگ بـوده و ایـن شاخصها رتبه بندی های متفاوت و مغایری بدست می دهند . بنابراین لازم است اصول دیگــری بـرای ایـن شاخصها ارائه گردد .

اصل ششم : اصل پایائی تکرار [8]یا اصل همگونی جمعیت [9]

فرض کنید $Y = [X, X]$ یعنی Y تکرار شده X با خودش باشد ، در اینصورت $I(Y) = I(X)$.

این اصل بیانگر آنستکه اگر تعداد افراد در کلیه سطوح درآمدی به یک نسبت تغیــیر کننـد انـدازه شـاخص نابرابری نباید تغییر کند . به عبارت دیگر شاخص نابرابری باید مستقل از تعداد افراد جامعه باشد . این اصل برای جمعیتهای با اندازه های مختلف مفید است .

اصل هفتم : اصل سازگاری یکپارچه [10]یا اصل تجزیه پذیری جمعی [11]

فرض کنید جامعه به G گروه افراز شده باشد و نیز فرض کنید گروهg ام (g=1,2,…,G) دارای میانگین درآمد μ_g بوده و شاخص نابرابری این گروه I_g باشد . مطابق این اصل اگر در هر گروه درآمد افراد به نحوی تغیـیر کند که میانگین درآمد گروه ثابت مانده اما نابرابری در آن گروه ، یعنــی I_g ، افزایـش یـابد آنگـاه شـاخص نابرابری کل جامعه نیز باید افزایش یابد .

۱-Homogeneity

۲-Invariance to scalar multiplication

۳-Scale

٤-Relative Indices

٥-Rankings of Income distributions

٦-Stochastic Dominance

۷-Lorenze Dominance

۸-Replication Invariance

۹-Homogeneity of population

۱۰-Aggregation Consistency

۱۱-Additive decomposability

انتظار وجود چنین خاصیتی برای یک شاخص نابرابری کاملا معقــول بـوده و فقـدان آن مـی توانـد اعتبـار شاخص را تا حد زیادی کاهش داده و دامنه کاربرد آن را بسیار محدود کند . اما بطــور شـگفت آوری اکـثر شاخصهای نـابرابری منجملـه ضریـب جینـی کـه از پـر کـاربردترین شاخصهاسـت فـاقد چنیـن خـاصیتی هستند[۴]. مطالعات تجربی بیانگر آنستکه با انجام چنین تغییری در درآمدها ضریب جینی نه تنها افزایــش نمی یابد بلکه در مواردی نیز کاهش می یابد .

بنابراین مطابق این اصل باید بتوان یک شاخص نابرابری را به مجموع نابرابری بین گروهها و داخل گروهــها تجزیه کرد یعنی باید داشته باشیم

$$I^T = I^B + I^W$$

که درآن :

$I^T = I(X)$ نابرابری کل

$I^B = I(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_G)$ نابرابری بین گروهها و

$I^W = \sum_{g=1}^{G} w_g I_g$ مجموع موزون نابرابری داخل گروهها است .

شاروک [۱] و[۲] نشان داده است که هر شاخص نابرابری که در کلیه این اصـول صـدق کنـد ایـن شـاخص ضریب ثابتی از خانواده شاخصهای آنتروپی تعمیم یافته است که به صورت زیر تعریف می شوند .

$$I_\gamma(X) = \frac{1}{N\gamma(\gamma+1)} \sum_{i=1}^{N} [(\frac{x_i}{\mu})^{\gamma+1} - 1] \qquad \gamma \neq 0,-1 \qquad (۱)$$

$$I_0(X) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{\mu} Ln(\frac{x_i}{\mu}) \qquad (۲)$$

$$I_{-1}(X) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} Ln(\frac{\mu}{x_i}) \qquad (۳)$$

I_0 و I_{-1} به ترتیب اندازه های مرتبه اول و دوم تیل هستند .

نقش پارامتر γ در تنظیم وزنی است که به گروههای درآمدی داده می شود . هر چقدر γ را از لحاظ قـدر مطلق بزرگ اختیار کنیم وزن بیشتری به مقدار درآمد گروههای درآمدی بالا یا گروههای درآمــدی پـایین (دمهای[۱] توزیع) داده ایم و در نتیجه مقدار شاخص نابرابری بزرگ خواهد شد و بالعکس هــر چقـدر γ را کوچک اختیار کنیم وزن بیشتری به مقدار درآمد گروههای درآمد متوسط (نواحی مرکزی توزیــع) داده و در نتیجه مقدار شاخص نابرابری کوچک خواهد شد .

خانواده I_γ شامل برخی دیگر از شاخصهای نابرابری است که از جمله مــی تـوان بـه ضریـب پراکنـدگـی ، شاخص هرفیندال و خــانواده شـاخصهای آتکینســون اشـاره کـرد . ضریـب پراکنـدگـی (C.V) و شـاخص هرفیندال (H) بصورت زیر تعریف می شوند :

$$C.V = \frac{\sigma}{\mu}$$

۱- Tails

$$H=\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}(\frac{x_i}{\mu})^2$$

به راحتی می توان نشان داد که :

$$C.V=\sqrt{2I_1}$$
$$H=\frac{1}{N}(2I_1+1)$$

خانواده شاخصهای آتکینسون به صورت زیر تعریف می شود :

$$A_\gamma=1-\frac{1}{\mu}(\int_0^\infty x^\gamma dF)^{\frac{1}{\gamma}} \qquad \gamma\leq 1$$

از طرفی شاخص I_γ را در حالت کلی می توان بصورت زیر نشان داد :

$$I_\gamma=\frac{1}{\gamma(\gamma+1)}\int_0^\infty \frac{x}{\mu}[(\frac{x}{\mu})^\gamma-1]dF$$

با انجام کمی عملیات ریاضی می توان نشان داد که برای هر $\gamma\leq 1$:

$$A_\gamma=1-[\gamma(\gamma-1)I_{\gamma-1}+1]^{\frac{1}{\gamma}}$$

چون رابطه فوق یک به یک است لذا هر عضوی از خانواده آتکینسون بطور یکتا متناظر با عضوی از خانواده GE بوده و بنابراین خانواده GE شامل خانواده آتکینسون است .

خواص GE

حال نشان میدهیم شاخص $I_\gamma(X)$ در تمام اصول ذکر شده صدق می کند .
پایا بودن $I_\gamma(X)$ نسبت به هر جایگشت از عناصر X و نیز پیوسته بودن آن نسبت به هر x_i واضح بوده و لذا در اصول اول و چهارم صدق می کند .
اگر برای هر i ، $x_i=a$ آنگاه $\mu=a$ و در نتیجه $I_\gamma(X)=0$ لذا در اصل دوم نیز صدق می کند .
اگر برای ثابت غیر صفر C ، $X'=CX$ آنگاه $\mu'=C\mu$ در اینصورت $I(X)=I(X')$ لذا در اصل پنجم نیز صدق می کند .
فرض کنید Y تکراری از X بصورت $Y=(x_1,x_2,...,x_N,x_{N+1},x_{N+2},...,x_{2N})$ باشد . در اینصورت $\mu_Y=\mu_X$ و نیز

$$I_\gamma(Y)=\frac{1}{2N\gamma(\gamma+1)}\sum_{i=1}^{2N}[(\frac{x_i}{\mu})^{\gamma+1}-1]$$

$$= \frac{1}{2N\gamma(\gamma+1)} 2\sum_{i=1}^{N}[(\frac{x_i}{\mu})^{\gamma+1} - 1]$$
$$= I_\gamma(X)$$

لذا در اصل ششم نیز صدق می کند .

قبل از اثبات اصل پیگو-دالتون از ریاضیات عمومی یادآوری می کنیم که اگر $0 < x_1 < x_2 < x_3$ و f تابعی محدب باشد آنگاه

$$f(x_3) - f(x_2) > f(x_2) - f(x_1) \qquad (۴)$$

و اگر f تابعی مقعر باشد جهت نامساوی بالا عوض می شود .

حال فرض کنید $0 < x_1 < x'_1 < x'_2 < x_2$ و a حقیقی باشد . در اینصورت تابع $f(x) = x^a$ برای $0 < a < 1$ مقعر است لذا با استفاده از رابطه (۴) و کمی عملیات ساده ریاضی نتیجه می شود که

$$x_2^a + x_1^a - x_1'^a - x_2'^a < 0 \qquad (۵)$$

و برای $a \notin [0,1)$. این تابع محدب بوده و در نتیجه

$$x_2^a + x_1^a - x_1'^a - x_2'^a > 0 \qquad (۶)$$

حال فرض کنید $X = (x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_j, ..., x_N)$ و $X' = (x_1, x_2, ..., x'_i, ..., x'_j, ..., x_N)$ دو بردار درآمد باشند بطوریکه تفاوت آنها تنها در مؤلفه i ام و j ام بوده و نیز $x_i > x_j$ ، $x_i - x_j = h$ و $d < h/2$. در اینصورت به راحتی می توان نشان داد که $x'_i = x_i - d > x_j + d = x'_j$ بوده و نیز

$$0 < x_j < x'_j < x'_i < x_i \qquad (۷)$$

از طرفی داریم :

$$I_\gamma(X) - I_\gamma(X') = \frac{1}{N\gamma(\gamma+1)\mu^{\gamma+1}}(x_i^{\gamma+1} + x_j^{\gamma+1} - x_i'^{\gamma+1} - x_j'^{\gamma+1})$$

اگر $0 < \gamma + 1 < 1$ آنگاه مطابق روابط ۷ و ۵ عبارت داخل کروشه منفی است و مخرج کسر نیز منفی است لذا $I_\gamma(X) - I_\gamma(X')$ مثبت است و اگر $\gamma + 1 \notin [0,1]$ آنگاه عبارت داخل کروشه و مخرج کسر هر دو مثبت بوده و در نتیجه $I_\gamma(X) - I_\gamma(X')$ نیز مثبت است .

با کمی عملیات ریاضی برای $\gamma + 1 = 0,1$ می توان نشان داد که $I_0(X)$ و $I_{-1}(X)$ نیز در اصل پیگو-دالتون صدق می کنند .

برای اثبات خاصیت تجزیه پذیری ، فرض کنید جامعه شامل N فرد بوده و $Y = (y_1, y_2, ..., y_N)$ بردار درآمد این جامعه با میانگین μ باشد . ونیز فرض کنید جامعه به G گروه افراز شده باشد و $x_{g1}, x_{g2}, ..., x_{gN_g}$ درآمد افراد گروه g ام با میانگین μ_g باشد . دراینصورت نابرابری کل جامعه که در اینجا آنرا با I_T نشان می دهیم به صورت زیر تجزیه می شود .

$$I^T = \sum_{g=1}^{G} \frac{N_g}{N} (\frac{\mu_g}{\mu})^{\gamma+1} I^g + I^B \qquad (۸)$$

که در آن I^B نابرابری بین گروهها و I^g نابرابری داخل گروه gام بوده و به صورت زیر می باشند .

$$I^B = \frac{1}{\gamma(\gamma+1)} \sum_{g=1}^{G} \frac{N_g}{N} [(\frac{\mu_g}{\mu})^{\gamma+1} - 1] \qquad (۹)$$

$$I^g = \frac{1}{N_g \gamma(\gamma+1)} \sum_{i=1}^{N_g} [(\frac{x_{gi}}{\mu_g})^{\gamma+1} - 1] \qquad (۱۰)$$

برای اثبات رابطه (۸) I^T را به صورت زیر تجزیه می کنیم .

$$I^T = \frac{1}{N\gamma(\gamma+1)} \sum_{i=1}^{N} [(\frac{y_i}{\mu})^{\gamma+1} - 1]$$

$$= \frac{1}{N\gamma(\gamma+1)} [\frac{1}{\mu^{\gamma+1}} \sum_{i=1}^{N} y_i^{\gamma+1} - N] \qquad (۱۱)$$

اما

$$\sum_{i=1}^{N} y_i^{\gamma+1} = \sum_{g=1}^{G} \sum_{i=1}^{N_g} x_{gi}^{\gamma+1} = \sum_{g=1}^{G} \sum_{i=1}^{N_g} \mu_g^{\gamma+1} (\frac{x_{gi}}{\mu_g})^{\gamma+1} \qquad (۱۲)$$

با قرار دادن (۱۲) در (۱۱) داریم :

$$I^T = \frac{1}{N\gamma(\gamma+1)} \left[\sum_{g=1}^{G} \sum_{i=1}^{N_g} (\frac{\mu_g}{\mu})^{\gamma+1} (\frac{x_{gi}}{\mu_g})^{\gamma+1} - N \right]$$

با اضافه و کم کردن ۱ از عبارت $(\frac{x_{gi}}{\mu_g})^{\gamma+1}$ در داخل سیگما و نیز قرار دادن $N = \sum_{g=1}^{G} \sum_{i=1}^{N_g} 1$ داریم :

$$I^T = \frac{1}{N\gamma(\gamma+1)} \left[\sum_{g=1}^{G} \sum_{i=1}^{N_g} (\frac{\mu_g}{\mu})^{\gamma+1} [(\frac{x_{gi}}{\mu_g})^{\gamma+1} - 1] + \sum_{g=1}^{G} \sum_{i=1}^{N_g} [(\frac{\mu_g}{\mu})^{\gamma+1} - 1] \right]$$

$$= \frac{1}{N\gamma(\gamma+1)} \sum_{g=1}^{G} \sum_{i=1}^{N_g} (\frac{\mu_g}{\mu})^{\gamma+1} [(\frac{x_{gi}}{\mu_g})^{\gamma+1} - 1] + I^B$$

در جمله اول عبارت سمت راست $\frac{N_g}{N_g}$ را ضرب می کنیم داریم :

$$I^T = \sum_{g=1}^{G} (\frac{N_g}{N})(\frac{\mu_g}{\mu})^{\gamma+1}\left[\frac{1}{N_g \gamma(\gamma+1)}\sum_{i=1}^{N_g}[(\frac{x_{gi}}{\mu_g})^{\gamma+1}-1]\right]+I^B$$

$$= \sum_{g=1}^{G} \frac{N_g}{N}(\frac{\mu_g}{\mu})^{\gamma+1} I^g + I^B$$

که همان رابطه (۸) است .

بطور مشابه I_0 که در اینجا آنرا نابرابری کل نامیده و با I_0^T نشان می دهیم بصورت زیر تجزیه می شود .

$$I_0^T = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{y_i}{\mu} Ln \frac{y_i}{\mu} \qquad (۱۳)$$

$$= \sum_{g=1}^{G}\frac{N_g}{N}\frac{\mu_g}{\mu} I_0^g + I_0^B \qquad (۱۴)$$

که در آن I_0^B نابرابری بین گروهها و I_0^g نابرابری در گروه gام بوده و بصورت زیر می باشند .

$$I_0^B = \sum_{g=1}^{G}\frac{N_g}{N}\frac{\mu_g}{\mu} Ln \frac{\mu_g}{\mu} \qquad (۱۵)$$

$$I_0^g = \frac{1}{N_g}\sum_{i=1}^{N_g}\frac{x_{gi}}{\mu_g} Ln \frac{x_{gi}}{\mu_g} \qquad (۱۶)$$

و I_{-1} که در اینجا آنرا نابرابری کل نامیده و با I_{-1}^T نشان می دهیم بصورت زیر تجزیه می شود .

$$I_{-1}^T = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Ln \frac{\mu}{y_i} \qquad (۱۷)$$

$$= \sum_{g=1}^{G}\frac{N_g}{N} I_{-1}^g + I_{-1}^B \qquad (۱۸)$$

که در آن I_{-1}^B نابرابری بین گروهها و I_{-1}^g نابرابری در گروه gام بوده و بصورت زیر می باشند .

$$I_{-1}^B = \sum_{g=1}^{G}\frac{N_g}{N} Ln \frac{\mu}{\mu_g} \qquad (۱۹)$$

$$I_{-1}^{g} = \frac{1}{N_g}\sum_{i=1}^{N_g} Ln\frac{\mu_g}{x_{gi}} \qquad (۲۰)$$

I_{-1} واضح ترین فرمول تجزیه را بدست می دهد چون با مشاهده رابطه ۱۸ می بینیم که نابرابری کل به مجموع نابرابری بین گروهها با مجموع موزون نابرابری داخل گروهها که وزن هر گروه نسبت جمعیت آن گروه به کل جمعیت است تجزیه شده است .

با استفاده از این شاخص برنامه ریزان و سیاستگذاران اقتصادی می توانند علاوه بر تعیین سهم گروههای درآمدی یا طبقات اجتماعی مانند طبقات تحصیلاتی ، جنسی ، نژادی ، سنی و مانند اینها در کل نابرابری ، تاثیر تغییرات نابرابری در این گروهها بر نابرابری کل جامعه را نیز اندازه گیری کنند ، موضوع مهمی که توسط سایر شاخصهای نابرابری و بخصوص ضریب جینی که متداولترین آنهاست قابل انجام نیست . با انجام چنین تجزیه ای که با نام تجزیه پذیری جمعی یا سازگاری یکپارچه معروف شده است ، هرگاه نابرابری در حداقل یکی از گروهها افزیش یابد بطوریکه نابرابری بین گروهها ثابت بماند نابرابری کل نیز افزایش می یابد.

برآورد GE

فرض کنید متغیر تصادفی $X > 0$ بیانگر درآمد افراد یک جامعه با تابع توزیع F_X و $\mu_\gamma = E(X^\gamma)$ موجود باشد . شاخص GE را در شکل آماری آن می توان بصورت زیر نشان داد .

$$I_\gamma = \frac{1}{\gamma(\gamma+1)}E((\frac{X}{\mu_1})^{\gamma+1}-1)$$

$$= \frac{1}{\gamma(\gamma+1)}\frac{1}{\mu_1^{\gamma+1}}E(X^{\gamma+1}-\mu_1^{\gamma+1}) \qquad \gamma \neq 0,-1 \qquad (۲۱)$$

$$I_0 = E(\frac{X}{\mu_1}Ln\frac{X}{\mu_1}) = \frac{1}{\mu_1}E(XLnX) - Ln\mu_1 \qquad (۲۲)$$

$$I_{-1} = E(Ln\frac{\mu_1}{X}) = Ln\mu_1 - E(LnX) \qquad (۲۳)$$

همانطوریکه مشاهده می شود I_γ تابعی از گشتاورهای توزیعX است لذا با جایگزینی گشتاورهای همنام نمونه به جای گشتاورهای توزیع می توان آنرا برآورد کرد . علاوه بر آن می توان با استفاده از روشهای آماری یک توزیع و واریانس تقریبی برای آن بدست آورد . در این خصوص به آممیا [۵] ، کوئل [۶] و میلز و زند وکیلی [۷] رجوع شود .

فرض کنید $Z = LnX$ ، $EZ = \mu$ ، $Var(Z) = \sigma^2$ ، $\gamma_1 = E(\frac{Z-\mu}{\sigma})^3$ و $\gamma_2 = E(\frac{Z-\mu}{\sigma})^4 - 3$.
μ ، σ^2 ، γ_1 و γ_2 به ترتیب میانگین ، واریانس ، چولگی و کشیدگی لگاریتم توزیع درآمد است .

معصومی و تیل [۸] نشان داده اند که I_0 و I_{-1} را می توان بر حسب این پارامترها و به شکل زیربسط داد .

$$I_0 = \frac{1}{2}\sigma^2[1+\frac{2}{3}\sigma\gamma_1+\frac{1}{4}\sigma^2\gamma_2+O(\sigma^2)] \qquad (۲۴)$$

$$I_{-1} = \frac{1}{2}\sigma^2[1+\frac{1}{3}\sigma\gamma_1+\frac{1}{12}\sigma^2\gamma_2+O(\sigma^2)] \qquad (۲۵)$$

توجه شود که اگر Z دارای توزیع لگ نرمال باشد آنگاه هر دو شاخص فوق مساوی $\frac{1}{2}\sigma^2$ می شوند .
مطابق روابط ۲۴ و ۲۵ مشاهده می شود که تغییرات γ_1 و γ_2 اثر بیشتری بر I_0 در مقایسه با I_{-1} می گذارد . از طرفی چون γ_1 و γ_2 به ترتیب چولگی و کشیدگی لگاریتم توزیع درآمد بوده و تابع لگاریتم تابعی یک به یک است لذا I_0 نسبت به تغییرات چولگی و کشیدگی توزیع درآمد حساس تر بوده و هر قدر چولگی و کشیدگی توزیع درآمد بیشتر باشد (با علامت مثبت) I_0 از I_{-1} بزرگتر خواهد بود . توزیع درآمد عموما چوله به راست است بر این اساس هر قدر میزان درآمد افراد با درآمد بالا بیشتر بوده و نیز جمعیت گروههای درآمدی حاشیه[۱] بیشتر باشد (دمهای[۲] توزیع چاق تر باشد) I_0 از I_{-1} بزرگتر خواهد بود .

GE به عنوان اندازه اختلاف بین دو توزیع

یک شاخص نابرابری باید بتواند میزان پراکندگی در توزیع درآمد یک جامعه (از دیدگاه شاخصهای عینی) و یا میزان اختلاف بین توزیع درآمد با یک توزیع نظری (از دیدگاه شاخصهای قیاسی) را به خوبی بیان کند . شاخص GE این کار را انجام می دهد . جهت توضیح بیشتر در این خصوص فرض کنید $S=\{E_1,E_2,...,E_N\}$ سیستمی با N پیشامد و $P=(p_1,p_2,...,p_N)$ و $Q=(q_1,q_2,...q_N)$ دو توزیع احتمال بر روی این سیستم باشند . در اینصورت $I_\gamma(Q,P)$ میزان اختلاف یا تفاوت بین این دو توزیع است . معنی این اختلاف هنگامی روشن تر می شود که از توزیعهای شرطی استفاده کنیم . بدین منظور فرض کنید $S=\{E_1,E_2,...,E_N\}$ سیستمی با توزیع احتمال $P=(p_1,p_2,...,p_N)$ باشد که در آن $p_i=P_r(E_i)$. فرض کنید F پیشامدی از یک سیستم دیگر و $Q=(q_1,q_2,...,q_N)$ توزیع احتمال شرطی P به شرط رخ دادن F باشد . آنگاه $I_\gamma(Q,P)$ میزان اختلاف یا تفاوتی است که در توزیع P با رخ دادن پیشامد F بوجود آمده است . این موضوع در مثال ۱ بصورت عددی نشان داده شده است .
در آمار معمولا برای مقایسه دو توزیع از مقایسه گشتاورهای آن دو توزیع استفاده می شود . آزمونهای مقایسه دو میانگین و دو واریانس نمونه ای از این مقایسه ها هستند . اما از تساوی تعداد محدودی از گشتاورها نمی توان به یکسان بودن آن دو توزیع پی برد و دو توزیع در صورت محدود[۳] بودن تکیه گاه[۴] آنها

---

[۱]-Extreme income

[۲]-Tails

[۳]-Finite

[۴]-Support

در صورتی یکسان هستند که همه گشتاورهای آنها با یکدیگر برابر باشد . در صورتی که تکیه گاه دو توزیع محدود نباشد حتی با یکسان بودن همه گشتاورهای دو توزیع نمی توان یکسان بودن آنها را نتیجه گرفت . شاخص GE دو توزیع P و Q را تماما با یکدیگر مقایسه می کند . در این حالت شاخص GE به صورت زیر می باشد .

$$I_{\gamma}(Q,P) = \frac{1}{\gamma(\gamma+1)} \sum_{i=1}^{N} q_i [(\frac{q_i}{p_i})^{\gamma} - 1] \qquad \gamma \neq 0,-1 \qquad (۲۶)$$

$$I_0(Q,P) = \sum_{i=1}^{N} q_i Ln \frac{q_i}{p_i} \qquad (۲۷)$$

$$I_{-1}(Q,P) = \sum_{i=1}^{N} p_i Ln \frac{p_i}{q_i} \qquad (۲۸)$$

در مورد چگونگی اندازه گیری نابرابری درآمد توسط GE فرض کنید در یک جامعه N نفره $X = (x_1, x_2, ..., x_N)$ بردار درآمد ، $S = \sum_{i=1}^{N} x_i$ درآمد کل و μ میانگین درآمد باشد . عدالت اجتماعی[۱] را توزیع یکسان درآمد کل به همه افراد جامعه تعریف کرده و اختلاف بین توزیع درآمد حاضر با عدالت اجتماعی را بعنوان شاخص نابرابری در نظر می گیریم . فرض کنید $P = (p_1, p_2, ..., p_N)$ بیانگر توزیع عادلانه یا توزیع مورد انتظار و $Q = (q_1, q_2, ..., q_N)$ بیانگر توزیع کنونی درآمد باشد در اینصورت $p_i = \frac{1}{N}$ و $q_i = \frac{x_i}{S} = \frac{x_i}{N\mu}$ ، $i = 1,2,...,N$.

اختلاف بین توزیع کنونی با توزیع عادلانه یا میزان از دست دادن بخشی از عدالت اجتماعی در وضعیت توزیع کنونی ، اندازه نابرابری ، توسط شاخص GE با قرار دادن P و Q در رابطه ۲۶ و بصورت زیر بدست می آید .

$$I_{\gamma}(Q,P) = \frac{1}{\gamma(\gamma+1)} \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{N\mu} [(\frac{x_i}{N\mu} N)^{\gamma} - 1]$$

$$= \frac{1}{N\gamma(\gamma+1)} \sum_{i=1}^{N} [(\frac{x_i}{\mu})^{\gamma+1} - 1] \qquad \gamma \neq 0,-1$$

که همان رابطه ۱ می باشد . بطور مشابه با قرار دادن P و Q در روابط ۲۷ و ۲۸ به ترتیب روابط ۲ و ۳ به دست می آیند .

---

[۱]-Social Equity

مثال ۱ :

فرض کنید $S_1=\{E_1,E_2,...,E_5\}$ سیستمی با توزیع احتمال $P=(.06 \quad .13 \ , \ .2 \ , \ .27 \ , \ .34)$ و $S_2=\{F_1,F_2,F_3\}$ سیستم دیگری با توزیع احتمال $Q=(.6,.3,.1)$ باشند . فرض کنید $S=S_1\times S_2$ سیستمی با پیشامدهای $E_i\cap F_j$ و با توزیع احتمال زیر باشد .

جدول ۱ : توزیع احتمال سیستم S

$P_{E\cap F}$	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
F_1	0.02	0.04	0.14	0.16	0.24
F_2	0.02	0.07	0.05	0.09	0.07
F_3	0.02	0.02	0.01	0.02	0.03

توزیع شرطی بر روی سیستم S_1 به شرط هر کدام از پیشامدهای F_1 ، F_2 و F_3 که آنها را بـه ترتیـب بـا Q_1 ، Q_2 و Q_3 نشان می دهیم در زیر آمده است .

جدول ۲ : توزیع شرطی S_1 به شرط پیشامدهای F_1 ، F_2 و F_3

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
$Q_1=P_{E_i/F_1}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{2}{30}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{8}{30}$	$\frac{12}{30}$
$Q_2=P_{E_i/F_2}$	$\frac{2}{30}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{5}{30}$	$\frac{9}{30}$	$\frac{7}{30}$
$Q_3=P_{E_i/F_3}$	$\frac{6}{30}$	$\frac{6}{30}$	$\frac{3}{30}$	$\frac{6}{30}$	$\frac{9}{30}$

اندازه شاخصهای $I_0(Q_i,P)$ ، $i=1,2,3$ گرد شده تا شش رقم اعشار در زیر آمده است .

$$I_0(Q_1,P)=0.033549 \quad , \quad I_0(Q_2,P)=0.056885 \quad , \quad I_0(Q_3,P)=0.160067$$

همانطوریکـه مشـاهده مـی شـود $P_r(F_1)=0.6$ لـذا ایـن پیشـامد محتملـتر از پیشـامدهای F_2 و F_3 بـا احتمالهای به ترتیب 0.3 و 0.1 بوده و در واقع شانس رخ دادن آن دو برابر شانس رخ دادن F_2 و شش برابر شانس رخ دادن F_3 است . با ملاحظه توزیعها مشاهده می شود که در توزیع P روندی صعودی در احتمال پیشامدهای E_1 تا E_5 برقرار است و این روند در توزیع Q_1 رعایت شده است اما در توزیع Q_2 این روند تا حدی رعایت شده و در توزیع Q_3 اصلا رعایت نشده است .

با رخ دادن F_1 توزیعی بر S_1 ایجاد می شـود ، توزیـع Q_1 ، کـه اختـلاف آن بـا توزیـع اولـی ، توزیـع P، 0.033549 است و این اختلاف کمتر از اختلاف توزیعی است که با رخ دادن F_2 و F_3 بـر S_1 ایجـاد شـده و مقادیر آنها به ترتیب 0.056885 و 0.160067 میباشد . نسبت این اختلافها به صورت زیر است .

$$\frac{I_0(Q_3,P)}{I_0(Q_1,P)} = 4.771 \cong 4.8 \qquad \text{و} \qquad \frac{I_0(Q_2,P)}{I_0(Q_1,P)} = 1.696 \cong 1.7$$

لذا همانطوریکه شانس رخ دادن F_1 دو برابر شانس رخ دادن F_2 است ، توزیعی که با رخ دادن F_2 بر S_1 ایجاد می شود اختلافی با توزیع اولیه دارد که این اختلاف حدود ۱/۷ برابر (نزدیک بـه دو برابـر) اختـلاف توزیعی است که با رخ دادن F_1 بر S_1 ایجاد می شود . بطور مشابه شانس رخ دادن F_1 شش برابــر شـانس رخ دادن F_3 بوده و توزیعی که با رخ دادن F_3 بر S_1 ایجاد می شود اختلافی با توزیع اولیــه دارد کـه ایـن اختلاف حدود ۴/۸ برابر (نزدیک به پنج برابر) اختلاف توزیعی است کـه بـا رخ دادن F_1 بـر S_1 ایجـاد مـی شود.

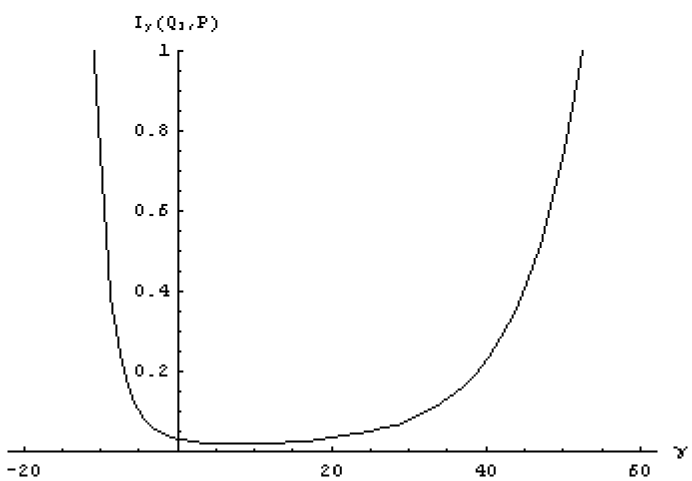
با استفاده از شاخص I_{-1} نیز نتایج مشابهی به دسـت مـی آیـد . در زیـر انـدازه شـاخصهای $I_{-1}(Q_i,P)$ ، $i=1,2,3$ گرد شده تا شش رقم اعشار و نیز نسبت آنها به $I_{-1}(Q_1,P)$ آمده است .

$$I_{-1}(Q_1,P) = 0.039353 \quad , \quad I_{-1}(Q_2,P) = 0.053656 \quad , \quad I_{-1}(Q_3,P) = 0.133973$$

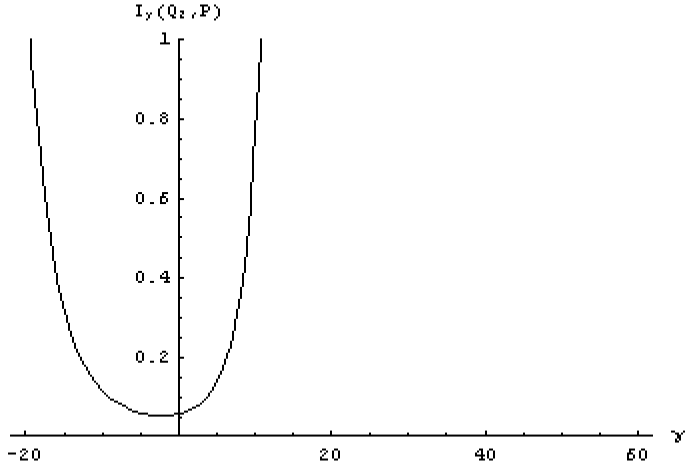
$$\frac{I_{-1}(Q_2,P)}{I_{-1}(Q_1,P)} = 1.363 \qquad \qquad \frac{I_{-1}(Q_3,P)}{I_{-1}(Q_1,P)} = 3.404$$

نتیجه اینکه هر چقدر پیشامدی محتملتر باشد با رخ دادن آن توزیعی بر S_1 ایجاد می شود که اختلاف آن با توزیع اولیه کمتر است و نیز رابطه معکوسی بین نسبت احتمال پیشامدها با نسبت اختلاف توزیعــهائی کـه ایجاد می کنند وجود دارد .

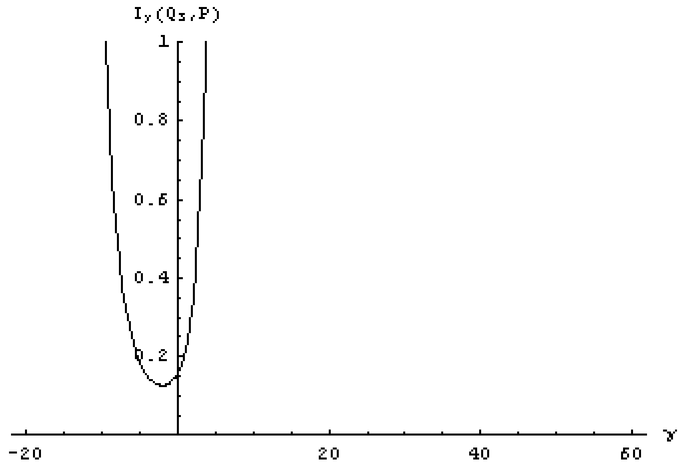
در شکلهای ۱، ۲ و ۳ به ترتیب نمودارهای $I_\gamma(Q_1,P)$ ، $I_\gamma(Q_2,P)$ و $I_\gamma(Q_3,P)$ و در شکل ۴ نیز هــر سه نمودار در یک دستگاه رسم شده است .



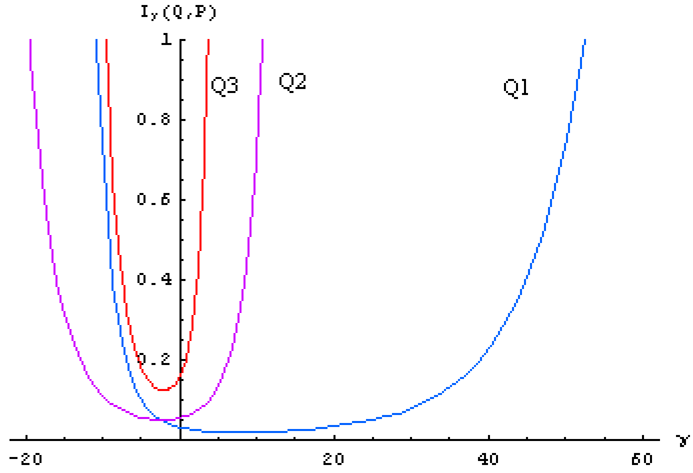
شکل ۱ : نمودار $I_\gamma(Q_1,P)$



شکل ۲ : نمودار $I_\gamma(Q_2, P)$



شکل ۳ : نمودار $I_\gamma(Q_3, P)$



شکل ۴ : نمودار های $I_\gamma(Q_1,P)$. $I_\gamma(Q_2,P)$ و $I_\gamma(Q_3,P)$ در یک دستگاه

مثال ۲ :

در این مثال از شاخصهای I_0 و I_{-1} به عنوان اندازه ای برای میزان نابرابری در توزیع داده ها یا بطور معادل میزان اختلاف توزیع داده ها با یک توزیع نظری (توزیع عادلانه) استفاده می کنیم . بدین منظور و با توجه به در دسترس نبودن داده های مربوط به درآمد از نمرات درس آمار تعدادی از دانشجویان استفاده می کنیم . توزیع عادلانه را توزیع یکسان نمره کل به همه افراد جامعه تعریف می کنیم .

نمرات درس آمار تعداد ۱۱۸ نفر از دانشجویان رشته های مدیریت و حسابداری که در هر رشته دانشجویان در دو جنس دختر و پسر بوده و سئولات امتحان یکسان بوده است را در نظر می گیریم . این نمرات در پیوست ۲ آمده است . جامعه را به چهار گروه زیر تقسیم می کنیم .

گروه ۱ : دانشجویان دختر رشته مدیریت

گروه ۲ : دانشجویان پسر رشته مدیریت

گروه ۳ : دانشجویان دختر رشته حسابداری

گروه ۴ : دانشجویان پسر رشته حسابداری

در جدول زیر میانگین ، انحراف معیار ، ضریب پراکندگی و تعداد دانشجویان در هر گروه و نیز نابرابری داخل گروه از طریق شاخصهای I_0^g و I_{-1}^g (روابط به ترتیب ۱۶ و ۲۰) آمده است . همچنین پارامترهای فوق برای کل جمعیت نیز در ردیف آخر جدول آمده است . برای کل جمعیت شاخصهای نابرابری ، I_0^T و I_{-1}^T ، مطابق روابط به ترتیب ۱۳ و ۱۷ محاسبه شده اند.

جدول ۳ : میانگین ، انحراف استاندارد ، تعداد ، نابرابری و ضریب پراکندگی برای هر گروه و نیز برای کل جمعیت

$C.V_g$	I_0^g	I_{-1}^g	N_g	σ_g	μ_g	**گروه**
۰/۲۰۰۶۴۲	۰/۰۲۰۱۰۴	۰/۰۲۱۴۱۸	۲۳	۱/۹۷۳۷۰۳	۹/۸۳۶۹۵۷	**۱**
۰/۲۲۶۰۴۵	۰/۰۲۴۹۵۷	۰/۰۲۵۸۹۲	۲۷	۲/۰۱۵۵۶۴	۸/۹۱۶۶۶۷	**۲**
۰/۲۰۲۱۵۳	۰/۰۲۰۷۷۳	۰/۰۲۲۲۹۰	۳۸	۲/۴۶۸۳۹۹	۱۲/۲۱۰۵۲۶	**۳**
۰/۱۷۷۶۵۴	۰/۰۱۵۱۹۹	۰/۰۱۵۳۴۳	۳۰	۲/۲۸۱۳۷۴	۱۲/۸۴۱۶۶۷	**۴**
۰/۲۴۴۵۴۸	۰/۰۳۰۳۲۸	۰/۰۳۱۹۸۹	۱۱۸	۲/۷۲۷۸۴۸	۱۱/۱۵۴۶۶۱	**کل**

به منظور تحقیق تجزیه پذیری I_0 و I_{-1} مؤلفه های روابط ۱۴ و ۱۸ را می نویسیم .

نابرابری کل

$$I_0^T = ۰/۰۳۰۳۲۸$$

$$I_{-1}^T = ۰/۰۳۱۹۸۹$$

نابرابری بین گروهها

$$I_0^B = \frac{1}{N\mu}\sum_{g=1}^{4} N_g \mu_g Ln\frac{\mu_g}{\mu} = ۰/۰۱۰۵۳۶$$

$$I_{-1}^B = \sum_{g=1}^{4}\frac{N_g}{N} Ln\frac{\mu}{\mu_g} = ۰/۰۱۰۸۱۱$$

مجموع موزون نابرابری داخل گروهها

$$\sum_{g=1}^{4}\frac{N_g \mu_g}{N\mu} I_0^g = ۰/۰۱۹۷۹۲$$

$$\sum_{g=1}^{4}\frac{N_g}{N} I_{-1}^g = ۰/۰۲۱۱۷۸$$

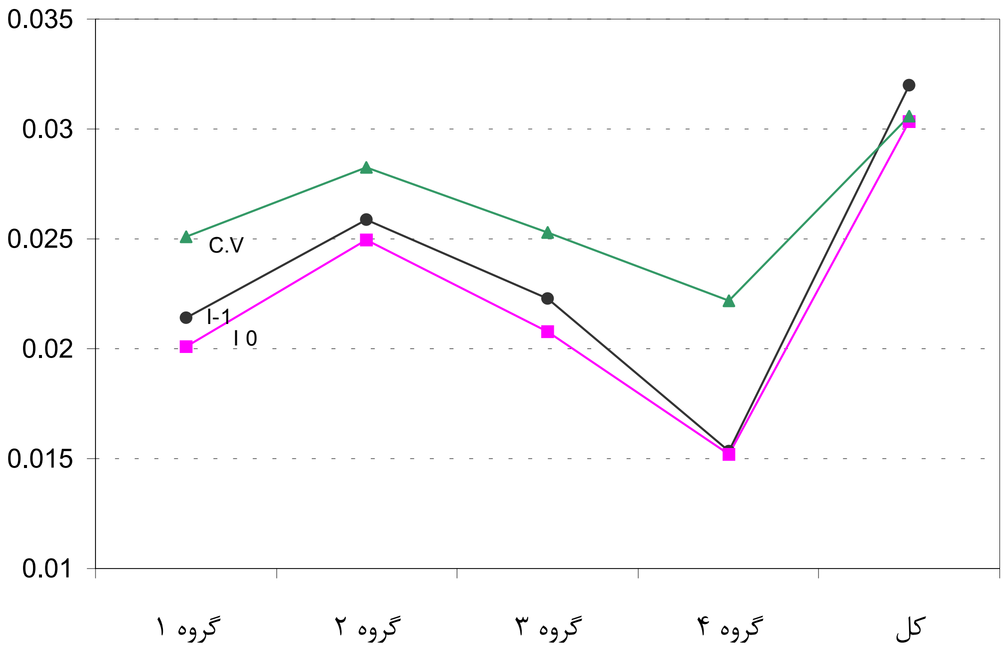
جهت وضوح بیشتر اندازه های فوق را در جدول زیر نشان می دهیم .

جدول ۴ : تجزیه نابرابری کل به منابع بین گروهها و داخل گروهها

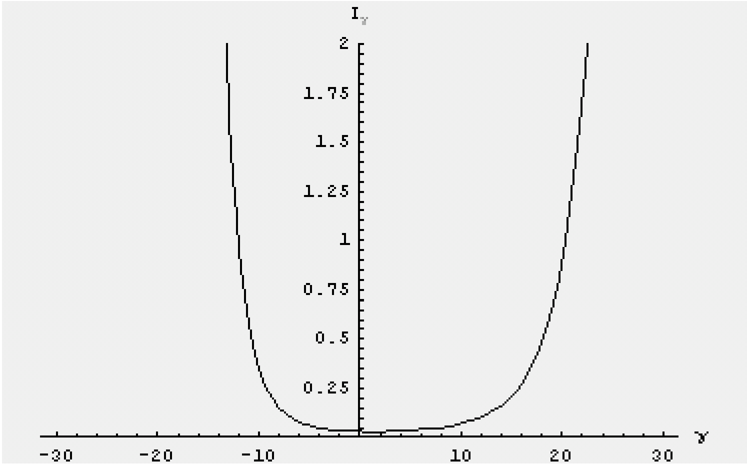
I_0	I_{-1}	منبع نابرابری
۰/۰۱۰۵۳۶	۰/۰۱۰۸۱۱	بین گروهها
۰/۰۱۹۷۹۲	۰/۰۲۱۱۷۸	داخل گروهها
۰/۰۳۰۳۲۸	۰/۰۳۱۹۸۹	کل

همانطوریکه مشاهده می شود ، اندازه های جدول بالا در روابط ۱۴ و ۱۸ صدق می کنند .

به منظور مقایسه روند تغییرات اندازه های نابرابری و ضریب پراکندگــی در گروهــهای مختلـف بـا یکدیگـر شکل ۵ را ارائه می دهیم . در این نمودار به جهت ترسیم بهتر ضریب پراکندگیها بر ۸ تقسیم شده است . همچنین در شکل ۶ نمودار $I_\gamma(X)$ برای $-30 \leq \gamma \leq 30$ رسم شده اسـت . بـه منظـور نمـایش بـهتر و واضح تر روند تغییرات $I_\gamma(X)$ این نمودار در مقیاسهای مختلف در اشکال ۷ ، ۸ ، ۹ و ۱۰ و در پیوست ۱ آمده است .



شکل ۵ : نمودار اندازه های نابرابری و ضریب پراکندگی به تفکیک گروهها و کل جمعیت



شکل ۶ : نمودار $I_\gamma(X)$ ($-30 \le \gamma \le 30$ و $0 \le I_\gamma \le 2$)

نتیجه گیری

انبوه شاخصهای نابرابری و عدم وجود معیارهای کمی و مناسبی جهت تعیین کیفیت آنها ، بحث شاخصهای نابرابری و تحلیل رفاه را غیر شفاف و گیج کننده کرده است و همین امر می تواند استفاده کنندگان از این شاخصها را دچار سر درگمی و متعاقب آن عدم اعتماد و نهایتا رویگردانی از استفاده از آنها کند .

خانواده شاخصهای آنتروپی تعمیم یافته که بر اساس یک رهیافت اصولی طرح شده است می تواند تا هنگام اعتبار این اصول و عدم ارائه اصول دیگری که این خانواده در آن صدق نکند خلأ ناشی از این نقیصه را پرکند .

این خانواده بر پایه توابع نظریه اطلاع [۱] استوار است که این نظریه نیز در برخی رشته های مختلف علم مانند نظریه ارتباطات ریاضی [۲]، سیبرنتیک[۳] ، ریاضی و آمار توانائی های خوبی از خود نشان داده است .

در اقتصاد نیز استفاده از توابع نظریه اطلاع رو به فزونی است . به عنوان مثال می توان به استفاده از این توابع در تحلیل چندگانه رفاه [۴]و تحلیل پویای نابرابری [۵]اشاره کرد .

معصومی [۹] ، [۱۰] ، [۱۱] و [۱۲] ، معصومی و نیکلزبرگ [۱۳] و داردونی [۱۴] از اندازه های اطلاع در ساختن یک تابع یکپارچه [۶]بر روی ویژگی های مختلف استفاده کرده و خواص این تابع را مورد بررسی قرار داده اند . این تابع ویژگی های مختلف را با یکدیگر ترکیب کرده و جایگزین درآمد در تحلیل رفاه می شود. مطابق با این روش نابرابری تنها بر پایه درآمد اندازه گیری نشده بلکه ویژگی های دیگری نیز که بر رفاه

---

[۱]-Information Theory

[۲]-Mathematical Communication Theory

[۳]-Cybernetics

[۴]-Multidimensional Welfare analysis

[۵]-Dynamic Inequality analysis

[۶]-Aggregate function

اجتماعی اثر گذارند در تحلیل نابرابری دخیل شده اند . در کنفرانس نابرابری ، فقر و رفاه انسـانی [1]، کـه در سال جاری در هلسینکی [2] توسط پژوهشکده جهانی تحقیقات توسعه اقتصـادی [3](WIDER) دانشـگاه UN [4] برگزار شده است مقالات زیادی در تحلیل چند گانه رفاه ارائه شده است که این مقالات الهام گرفته از روش ذکر شده در بالاست . آدرس وب این کنفرانس جهت در یافت مقالات بصورت زیر است :

http://www.wider.unu.edu/conference/conference-2003-2/conference2003-2.htm

معصومی و زند وکیلی [۱۵] ، [۱۶] و [۱۷] از اندازه هـای اطـلاع در سـاختن یـک تـابع یکپـارچـه بـر روی زمانهای مختلف استفاده کرده و توسط آن درآمد خانوار را در زمانهای مختلف بـا یکدیگـر ترکیـب کـرده و تحلیل پویائی از نابرابری بدست داده اند .

در تحلیل پویای رفاه هیرس برگ ، معصومی و اسـلاج [۱۸] از انـدازه هـای اطـلاع در تحلیـل خوشـه ای [5] استفاده کرده اند .

موارد فوق تنها نمونه هائی از کاربردهای اندازه های اطلاع در بحث تحلیل رفاه و نابرابری است حـال آنکـه کاربرد این توابع و اندازه ها محدود به این بحث نشده و دامنه بسیار وسیعی را در بر می گیرد .

به طور کلی هرگاه در یک پژوهش هدف اندازه گیری فاصله یا تشابه بین توزیعها باشـد ، موضوعـی کـه در بسیاری از رشته های کـاربردی از نیازهـای عمـده اسـت ، شـاخصهای اطـلاع حداقـل کاندیداهـای بسـیار نیرومندی هستند .

---

[1]-Conference on Inequality , Poverty and Human Well-Being

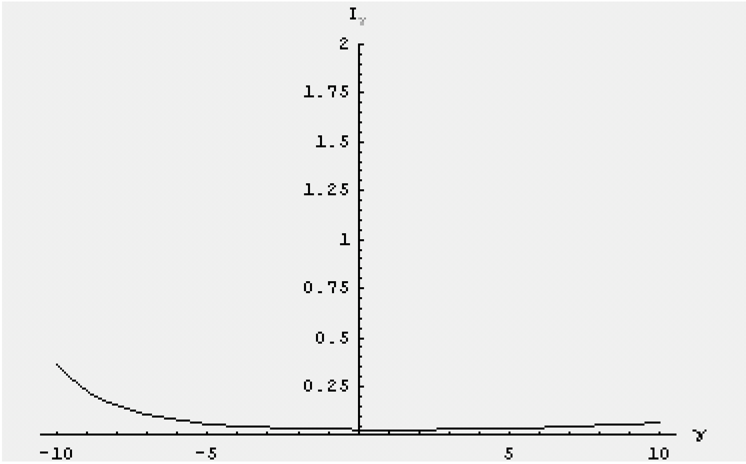
[2]-Helsinki , Finland , 30-31 May 2003

[3]-World Institute for Development Economics Research

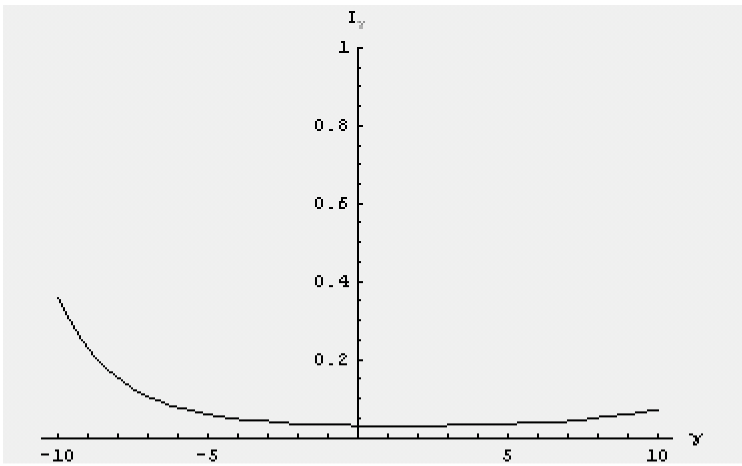
[4]-United Nations University

[5]-Cluster analysis

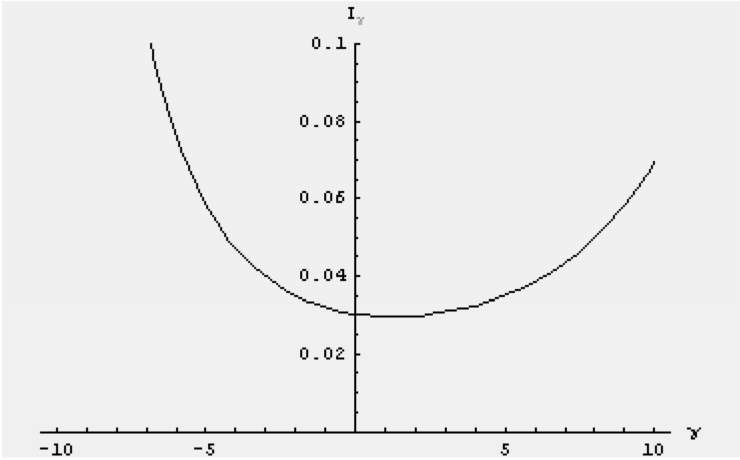
پیوست ۱ : نمودارهای $I_\gamma(X)$ (مثال ۲)



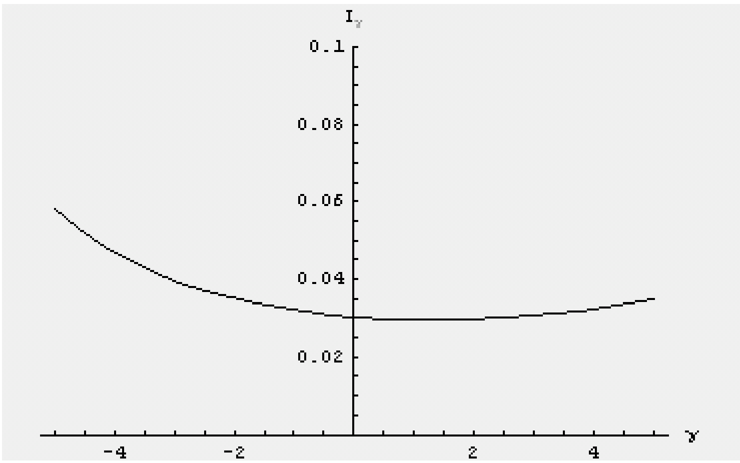
شکل ۷ : نمودار $I_\gamma(X)$ ($-10 \le \gamma \le 10$ و $0 \le I_\gamma \le 2$)



شکل ۸ : نمودار $I_\gamma(X)$ ($-10 \le \gamma \le 10$ و $0 \le I_\gamma \le 1$)



شکل ۹ : نمودار $I_\gamma(X)$ ($-10 \le \gamma \le 10$ **و** $0 \le I_\gamma \le 0.1$)



شکل ۱۰ : نمودار $I_\gamma(X)$ ($-5 \le \gamma \le 5$ **و** $0 \le I_\gamma \le 0.1$)

پیوست ۲ : داده های مثال ۲

ردیف	گروه	نمره	ردیف	گروه	نمره	ردیف	گروه	نمره	ردیف	گروه	نمره
۱	۱	۱۰/۷۵	۳۱	۲	۸/۷۵	۶۱	۳	۱۶/۲۵	۹۱	۴	۱۳/۵
۲	۱	۱۱/۲۵	۳۲	۲	۹/۷۵	۶۲	۳	۱۲/۲۵	۹۲	۴	۱۷/۵
۳	۱	۸/۷۵	۳۳	۲	۷/۷۵	۶۳	۳	۱۳/۲۵	۹۳	۴	۱۱/۲۵
۴	۱	۶/۲۵	۳۴	۲	۱۰/۷۵	۶۴	۳	۱۵/۵	۹۴	۴	۱۰/۵
۵	۱	۱۱/۲۵	۳۵	۲	۱۰/۲۵	۶۵	۳	۱۶/۲۵	۹۵	۴	۱۲/۵
۶	۱	۱۳/۲۵	۳۶	۲	۶/۵	۶۶	۳	۱۴/۵	۹۶	۴	۱۷/۲۵
۷	۱	۱۰/۲۵	۳۷	۲	۷/۷۵	۶۷	۳	۹/۲۵	۹۷	۴	۱۰
۸	۱	۸/۵	۳۸	۲	۱۱/۷۵	۶۸	۳	۱۲/۷۵	۹۸	۴	۱۳/۵
۹	۱	۱۰/۷۵	۳۹	۲	۹/۲۵	۶۹	۳	۱۱/۵	۹۹	۴	۱۵/۲۵
۱۰	۱	۱۰/۷۵	۴۰	۲	۱۰/۵	۷۰	۳	۱۴/۵	۱۰۰	۴	۱۱/۲۵
۱۱	۱	۱۲/۲۵	۴۱	۲	۱۳/۵	۷۱	۳	۹/۲۵	۱۰۱	۴	۱۴
۱۲	۱	۸	۴۲	۲	۱۰/۲۵	۷۲	۳	۹/۲۵	۱۰۲	۴	۱۰/۷۵
۱۳	۱	۷/۷۵	۴۳	۲	۶/۵	۷۳	۳	۱۵/۵	۱۰۳	۴	۱۱/۲۵
۱۴	۱	۹/۵	۴۴	۲	۷/۲۵	۷۴	۳	۱۵	۱۰۴	۴	۱۳/۲۵
۱۵	۱	۸/۵	۴۵	۲	۸/۵	۷۵	۳	۸/۷۵	۱۰۵	۴	۱۲/۲۵
۱۶	۱	۸/۵	۴۶	۲	۸/۵	۷۶	۳	۱۳/۲۵	۱۰۶	۴	۱۵
۱۷	۱	۵/۵	۴۷	۲	۱۰/۷۵	۷۷	۳	۱۰/۵	۱۰۷	۴	۱۴/۵
۱۸	۱	۱۲	۴۸	۲	۸/۷۵	۷۸	۳	۱۰/۷۵	۱۰۸	۴	۱۳/۲۵
۱۹	۱	۱۰/۵	۴۹	۲	۹/۷۵	۷۹	۳	۱۰/۵	۱۰۹	۴	۱۳/۵
۲۰	۱	۹/۷۵	۵۰	۲	۸/۷۵	۸۰	۳	۵/۵	۱۱۰	۴	۱۰/۵
۲۱	۱	۸/۵	۵۱	۳	۱۴/۲۵	۸۱	۳	۱۱/۵	۱۱۱	۴	۸/۵
۲۲	۱	۱۲/۲۵	۵۲	۳	۱۲/۵	۸۲	۳	۱۱/۵	۱۱۲	۴	۱۲/۷۵
۲۳	۱	۱۱/۵	۵۳	۳	۱۵/۲۵	۸۳	۳	۱۳/۲۵	۱۱۳	۴	۱۲/۵
۲۴	۲	۸/۲۵	۵۴	۳	۱۰/۵	۸۴	۳	۱۴/۲۵	۱۱۴	۴	۱۳/۲۵
۲۵	۲	۷/۷۵	۵۵	۳	۹/۷۵	۸۵	۳	۱۱/۵	۱۱۵	۴	۱۷/۲۵
۲۶	۲	۱۱/۷۵	۵۶	۳	۱۲/۲۵	۸۶	۳	۱۳/۷۵	۱۱۶	۴	۱۲/۲۵
۲۷	۲	۶	۵۷	۳	۱۰/۲۵	۸۷	۳	۱۰/۷۵	۱۱۷	۴	۹/۵
۲۸	۲	۵	۵۸	۳	۱۱/۲۵	۸۸	۳	۱۳	۱۱۸	۴	۱۴/۲۵
۲۹	۲	۶	۵۹	۳	۹	۸۹	۴	۱۴/۲۵			
۳۰	۲	۱۰/۵	۶۰	۳	۱۵/۲۵	۹۰	۴	۱۰			

مراجـع

[1] Shorrocks , A. F. (1980) *, " The class of additively decomposable inequality measures ," **Econometrica** , 48 , 613-625 .*

[2] Shorrocks , A. F. (1984) *, " Inequality decomposition by population subgroups ," **Econometrica** , 52 , 1369-1385 .*

[3] Bourguignon , F. (1979) *, "Decomposable income inequality measures , " **Econometrica** , 47,901-920 .*

[4] Maasoumi , E. (1993) *, " A Compendium to Information Theory in Economics and Econometrics ," **Econometric Reviews** , 12(2) , 137-181.*

[5] Amemiya , T. (1985) *, Advanced Econometrics , Harvard University Press , Cambridge , MA .*

[6] Cowell , F.A. (1989) *, " Sampling variance and decomposable inequality measures , " **Journal of Econometrics** , 42 , No. 1 , 27-42 .*

[7] Mills , J. , and S. Zandvakili (1997) *, " Statistical inference via bootstrapping for measures of inequality , "**Journal of Applied Econometrics** , forthcoming .*

[8] Maasoumi , E. and Theil (1979) *, " The effect of the shape of the income distribution on two inequality measures , " **Economics Letters** , 4 , 289-291 .*

[9] Maasoumi , E. (1986a) *, " The measurement and decomposition of multidimensional inequality , " **Econometrica** , 54,991-997 .*

[10] Maasoumi , E. (1986b) *, " Unknown regression functions and information efficient functional forms : An interpretation , " **Advance in Econometrics** , vol. 5 , 301-309 .*

[11] Maasoumi , E. (1989a) *, " Composite Indices of Income and Other Developmental Indicators : A General Approach , " **Research on Economic Inequality** , vol. 1 , 269-286 .*

[12] Maasoumi , E. (1989b) *, " Continuously Distributed Attributes and Measures of Multivariate Inequality , " **Journal of Econometrics** , 131-144 .*

[13] Maasoumi , E. and G. Nickelsburg (1988) *, "Multivariate Measures of Well-Being and an Analysis of Inequality in the Michigan Data , "* ***Journal of Business and Economic Statistics*** *, vol.6 , 3 , 327-334 .*

[14] Dardanoni , Valentino , (1990) *, "A note on Multidimensional Inequality Comparisons , "* University of California at San Diego *,* ***Working Paper*** *.*

[15] Maasoumi , E. and S. Zandvakili (1986) *, "A Class of Generalized Measures of Mobility with Applications , "* ***Economics Letters*** *, 97-102 .*

[16] Maasoumi , E. and S. Zandvakili (1989) *, "Mobility Profiles and Time Aggregates of Individual Incomes , "* ***Research on Economic Inequality*** *, vol 1 , 195-218 .*

[17] Maasoumi , E. and S. Zandvakili (1990) *, "Generalized Entropy Measures of Mobility for Different Sexes and Income Levels , "* ***Journal of Econometrics*** *, 121-133 .*

[18] Hirschberg , J. , E. Maasoumi , and D.J. Slottje (1991) *, "Cluster Analysis and the Quality of Life Across Countries , "* ***Journal of Econometrics*** *, vol. 50 , No.1/ 2 , 131-150 .*